

بِنامِ خدا

شناسنامه و فیا

ریاضی ۱

ثریا کاظمی جوجیلی

درس ریاضی یک، در همه مؤسسات دانشگاهی به عنوان پیش نیاز برای همه دروس ریاضی مربوطه رشته‌های فنی و مهندسی می‌باشد این نیاز اصلی به دلیل ایجاد توانایی دانشجویان در حل انتگرال و بکارگیری کاربردهای انتگرال در سایر دروس می‌باشد. از این رو در این کتاب نیز مانند سایر مراجع ریاضی یک، از ابتدا تا انتها، همه مطالب مربوط به بحث انتگرال است و یا مانند فصل سری‌های توانی به حل انتگرال ختم می‌شود. با این وصف، در فصل حاضر انتگرال نامعین و معین و همه قضایای مورد نیاز انتگرال مطرح می‌شود و به عنوان پایه‌ای برای فصل‌های دیگر این کتاب از همه مطالب آن استفاده می‌کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه.....	۷
فصل اول انتگرال معین و نامعین و قضایا.....	۹
انتگرال نامعین.....	۹
انتگرال معین.....	۱۴
روش تغییر متغیر در حل انتگرال.....	۴۳
فصل دوم: کاربرد انتگرال در محاسبه سطح، حجم حاصل از دوران، طول قوس ومساحت	
رویه‌های دورانی.....	۵۱
محاسبه سطح.....	۵۳
محاسبه طول منحنی.....	۶۳
محاسبه مساحت رویه دورانی.....	۶۹
محاسبه حجم حاصل از دوران.....	۷۵
فصل سوم: توابع متعالی.....	۸۷
قضایای تابع معکوس.....	۸۷
تابع لگاریتم طبیعی.....	۹۰
توابع مثلثاتی معکوس.....	۱۱۹
توابع هذلولوی یا هایپربولیک و معکوس آنها.....	۱۳۵
فصل چهارم: روش‌های انتگرال‌گیری.....	۱۵۳
روش جزء به جزء.....	۱۵۳
روش انتگرال توان‌های مثلثاتی.....	۱۵۹

۱۶۷.....	روش تغییر متغیر مثلثاتی.....
۱۷۴.....	روش تجزیه به کسرهای جزئی و یا انتگرال تابع گویا (تابع کسری).....
۱۸۲.....	روش تغییر متغیرهای گویاساز.....
۱۹۳.....	فصل پنجم: سری‌های توانی.....
۲۰۷.....	فصل ششم: انتگرال مجازی یا انتگرال ناسره.....
۲۲۵.....	منابع.....

مقدمه

متن حاضر بر اساس جزوه ریاضی عمومی یک اینجانب است که مدت‌ها در دانشگاه آزاد اسلامی واحد خوراسگان تدریس شده است و فصول این کتاب هم بر اساس سر فصل‌های همین درس مرتب شده است.

در این متن قضایا بدون اثبات آمده و فقط کاربرد قضیه‌ها مطرح بوده است که با ارائه مثال‌های مرتبط، سعی در نشان دادن فایده و استفاده عملی آنها شده است.

قابل ذکر است که فصول این کتاب بر اساس نظم حاضر قابل فهم است و همچنین می‌توان از فصل دوم کتاب که چهار کاربرد مهم انتگرال را در بر دارد صرف نظر کرد و مطالعه یا تدریس آن را تا پایان فصل آخر کتاب به تأخیر انداخت.

و نیز نکته دیگر قابل ذکر آن است که این متن برای کلیه دانشجویان رشته‌های فنی و مهندسی تألیف شده، و برای درک مطالب آن، آشنایی با مبحث تابع و حد و پیوستگی و مشتق و کاربردهای مشتق به عنوان پیش‌نیاز اولیه کاملاً ضروری می‌باشد.

در پایان از لطف و تحمل و صبوری همه خوانندگان عزیز تشکر می‌کنم و امیدوارم که با دقت نظر خود اشکالات و ایرادات و کمبودهای کتاب را گوشزد کرده و این حقیر را در برطرف کردن نقص‌ها و ارائه یک متن کامل و تا جای ممکن خالی از اشتباه یاری فرمایند.

ثریا کاظمی جوجیلی

زمستان ۱۳۹۷

فصل اول

انتگرال معین و نامعین و قضایا

انتگرال نامعین

تعریف: ضد مشتق یا تابع اولیه یا انتگرال نامعین تابع.
اگر I یک بازه باشد و f, g دو تابع باشند به طوریکه:

$$f: I \rightarrow R, g: I \rightarrow R, g'(x) = f(x) : \forall x \in I$$

در این صورت g را یک تابع اولیه یا ضد مشتق یا انتگرال نامعین تابع f بر بازه I می‌نامیم و با نماد $\int f(x) dx$ و یا به اختصار با نماد $\int f dx$ آن را نشان می‌دهیم.

مثال:

$$(x^2)' = 2x$$

پس تابع $y = x^2$ یک تابع اولیه برای تابع $y = 2x$ است و همچنین

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

تابع $y = \cos(x)$ تابع اولیه‌ای برای تابع $y = -\sin(x)$ است.

از طرفی چون داریم:

$$(x^2 + 1)' = 2x$$

$$(x^2 + 4)' = 2x$$

$$(x^2 + K)' = 2x$$

K : یک عدد ثابت

پس هر یک از توابع $y = x^2 + 1$ و $y = x^2 + 4$ و $y = x^2 + K$ که در آن K هر عدد ثابت دلخواهی می‌تواند باشد را، تابع اولیه یا ضد مشتق یا انتگرال نامعینی برای تابع $y = 2x$ می‌توان محسوب کرد و با توجه به مثال‌های فوق می‌بینیم که تابع اولیه یا ضد مشتق یا انتگرال نامعین یک تابع در صورت وجود منحصر به فرد نیست و بنابراین در حالت کلی

اگر g تابع اولیه‌ای برای f بر بازه I باشد، تابع اولیه یا انتگرال نامعین یا ضدمشتق f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int f(x) dx = g(x) + K \quad \text{یا} \quad \int f(x) dx = g(x) + K$$

به طور مثال می‌نویسیم:

$$\int 2x dx = x^2 + K$$

$$\int -\sin(x) dx = \cos(x) + K$$

توضیح:

الف: در نمایش انتگرال نامعین همواره یک عدد ثابت به نام ثابت انتگرال‌گیری یا ثابت جمعی وجود دارد که معمولاً آن را با حرف K یا C نمایش می‌دهیم.

ب: اگر I یک بازه و f تابعی بر این بازه باشد، یعنی $f: I \rightarrow R$ ، در حالت کلی لزوماً f تابع اولیه ندارد و به طور مثال می‌توان ثابت کرد که اگر:

$$f: [-2, 3) \rightarrow R$$

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

تابع f مشتق هیچ تابعی نیست.

• قضیه‌های انتگرال نامعین

۱. اگر f بر بازه I پیوسته باشد، f بر این بازه انتگرال نامعین دارد.

نکته: عکس قضیه فوق لزوماً صحیح نیست.

f انتگرال نامعین دارد. $\Rightarrow f$ پیوسته است.

۲.

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + K$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + K$$

$$\int \sec^2(x) dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \int (1 + \tan^2(x)) dx = \tan(x) + K$$

$$\int \csc^2(x) dx = \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = \int (1 + \cot^2(x)) dx = -\cot(x) + K$$

$$\int \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx = \sec(x) + K$$

$$\int \csc(x) \cot g(x) dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx = -\csc(x) + K$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K \quad \text{به شرط: } n+1 \neq 0$$

۳. خاصیت خطی بودن انتگرال نامعین

اگر توابع f_1, f_2 هر دو بر بازه I دارای انتگرال نامعین باشند در این صورت توابع λf_1 و $f_1 - f_2, f_1 + f_2$ (λ یک عدد ثابت) نیز همگی بر بازه I دارای انتگرال نامعین می‌باشند و علاوه بر آن

$$\int (f_1 + f_2) dx = \int f_1 dx + \int f_2 dx$$

$$\int (f_1 - f_2) dx = \int f_1 dx - \int f_2 dx$$

$$\int \lambda f_1 dx = \lambda \int f_1 dx$$

مثال:

$$\int \left(3\sin(x) + \frac{2}{x^3} \right) dx = 3 \int \sin(x) dx + 2 \int \frac{dx}{x^3}$$

$$= 3 \times (-\cos(x)) + 2 \times \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = -3\cos(x) - \frac{1}{x^2} + K$$

توضیح:

خاصیت خطی بودن انتگرال نامعین را می‌توان به هر تعداد متناهی از توابع انتگرال پذیر (دارای انتگرال نامعین) تعمیم داد، به عبارتی اگر $f_1, f_2, \dots, f_n$ تابع انتگرال پذیر (دارای انتگرال نامعین) بر بازه I باشند و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ضریب ثابت، در این صورت داریم که تابع $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$ نیز بر بازه I انتگرال نامعین دارد و علاوه بر آن،

$$\int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n) dx = \lambda_1 \int f_1 dx + \lambda_2 \int f_2 dx + \dots + \lambda_n \int f_n dx$$

به عبارتی

$$\int \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i dx = \sum_{i=1}^n \int \lambda_i f_i dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int f_i dx$$

مثال:

$$\int (x^3 - 4x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin(x)) dx = \int x^3 dx - 4 \int x^2 dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \sin(x) dx =$$

$$\frac{x^4}{4} - 4 \times \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} - \cos(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - \cos(x) + K$$

مثال: اگر $p(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد یعنی،

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

در این صورت بر هر بازه I داریم:

$$\int P(x) dx = a_n \int x^n dx + \dots + a_1 \int x dx + a_0 \int dx$$

$$= a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + K$$

۴. قضیه تغییر متغیر در ساده‌ترین حالت آن

اگر g تابع اولیه‌ای برای تابع f باشد یعنی $\int f(x) dx = g(x) + K$ در این صورت داریم:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{g(ax+b)}{a} + K$$

(که در آن a و b دو عدد ثابت می‌باشند و $a \neq 0$)

مثال:

$$\int \cos(2x-3) dx = \frac{\sin(2x-3)}{2} + K$$

$$\int \sqrt{3x+2} dx = \frac{(3x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{(\frac{1}{2}+1) \times 3} = \frac{2}{9} (3x+2)^{\frac{3}{2}} + K$$

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin(2x)}{2} \right] = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + K$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x) \cos^2(x)}$$

$$\sin^2(x) \cos^2(x) = (\sin(x) \cos(x))^2 = \left(\frac{\sin(2x)}{2} \right)^2 = \frac{\sin^2(2x)}{4}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^2(x) \cos^2(x)} = \int \frac{4}{\sin^2(2x)} dx = 4 \int \csc^2(2x) dx =$$

$$4 \left(\frac{-\cot g(2x)}{2} \right) = -2 \cot g(2x) + K$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{2x-3}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-3+3}{\sqrt{2x-3}} dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x-3}{\sqrt{2x-3}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{3}{\sqrt{2x-3}} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{2x-3} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times 2} + \frac{3}{2} \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times 2}$$

$$= \frac{(2x-3)^{\frac{3}{2}}}{6} + \frac{3}{2} \sqrt{2x-3} + K$$

تذکر:

الف: مثال بالا پس از تدریس تغییر متغیر در حالت کلی، سریع‌تر و ساده‌تر قابل حل است.
ب: برخی از اتحادهای مثلثاتی که اغلب در حل انتگرال بکار می‌رود، عبارتند از:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

تمرین

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int \sin^2(x) dx, \int \frac{x dx}{(1-2x)^4}$$

انتگرال معین

برای بیان انتگرال معین ابتدا نیاز است تا دو مفهوم افراز و مجموع ریمان گفته شود و سپس به تعریف انتگرال معین می‌پردازیم.

تعریف: افراز یک بازه

اگر $I = [a, b]$ یک بازه بسته متناهی باشد مجموعه نقاط $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ را یک افراز دلخواه بازه $[a, b]$ می‌نامیم هرگاه

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

واضح است که این افراز $n+1$ نقطه دارد و بازه $[a, b]$ را به n زیر بازه تقسیم می‌کند،

$$I_n = [x_{n-1}, x_n] = [x_{n-1}, b], \dots, I_2 = [x_1, x_2], \quad I_1 = [x_0, x_1] = [a, x_1]$$

$I_i = [x_{i-1}, x_i]$ را i امین زیر بازه افراز می‌نامیم و طول آن را با نماد $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ نشان می‌دهیم.

$$\text{طول زیر بازه اول} = \Delta_1 = x_1 - x_0 = x_1 - a$$

$$\text{طول زیر بازه دوم} = \Delta_2 = x_2 - x_1$$

$$\text{طول زیر بازه } i \text{ ام} = \Delta_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\text{طول زیر بازه } n \text{ ام} = \Delta_n = x_n - x_{n-1} = b - x_{n-1}$$

همچنین طول بزرگ‌ترین زیر بازه افراز را طول افراز یا نرم‌افزار می‌نامیم و با نماد $\|P\|$ آن را نشان می‌دهیم به عبارتی،

$$\|P\| = \max\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n\} = \max\{\Delta_i\}_{i=1}^n$$

مثال: چند افراز از بازه $[0, 1]$ را بنویسید.

حل:

$$P_1 = \{0, 1\} \text{ افراز بدیهی}$$

$$P_2 = \left\{0, \frac{1}{3}, 1\right\}$$

$$P_3 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\right\}$$

واضح است که برای هر بازه به تعداد نامتناهی می‌توان افراز نوشت و هم چنین در هر

افراز $\sum_{i=1}^n \Delta_i = b - a$ یعنی مجموع طول همه زیربازه‌ها برابر طول بازه اصلی است.

در افراز اول،

$$I_1 = [0, 1], \Delta_1 = 1 - 0 = 1, \|P_1\| = 1$$

در افراز دوم،

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right], I_2 = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}, \Delta_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \|P_2\| = \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

در افراز سوم،

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \Delta_1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \Delta_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$I_3 = \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right], \Delta_3 = \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

$$I_4 = \left[\frac{7}{8}, 1\right], \Delta_4 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\|P_3\| = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\} = \frac{1}{2}$$

تعریف: افراز منظم

افرازی از بازه که طول تمام زیر بازه‌های آن برابر باشد را افراز منظم آن بازه می‌نامیم، واضح است که اگر $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ افراز منظمی از بازه $[a, b]$ باشد در این صورت

$$\|P\| = \Delta_i = \frac{b-a}{n}$$

مثال: چند افراز منظم از بازه $[0, 1]$ بنویسید.

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \quad P_2 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}, \quad P_3 = \{0, 1\}$$

مثال: یک افراز از بازه $[1, 2]$ بنویسید که طول آن کمتر از $\frac{3}{7}$ باشد.

حل: فرض می‌کنیم $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ یک افراز منظم بازه $[1, 2]$ باشد با نرم

کمتر از $\frac{3}{7}$ ، در این صورت داریم:

$$\Delta_i = \|P\| = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} < \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{3}{7} \Rightarrow n > \frac{7}{3} \sim 2.3$$

n تعداد زیر بازه‌های افراز است بنابراین n لزوماً یک عدد صحیح است پس $n = 3, 4, 5, \dots$ ، به‌طور دلخواه اگر قرار دهیم $n = 3$ داریم:

$$\Delta_i = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P = \left\{ 1, 1 + \frac{1}{3}, 1 + 2 \times \frac{1}{3}, 1 + 3 \times \frac{1}{3} \right\} \Rightarrow p = \left\{ 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2 \right\}$$

تعریف: نظریف یا ظریف تر بودن

اگر P_1, P_2 هر دو افرازی از بازه $[a, b]$ باشند، می‌گوئیم افراز P_2 از P_1 ظریف‌تر است هر گاه $P_1 \subseteq P_2$ باشد.

واضح است که اگر P_2 از P_1 ظریف‌تر باشد در این صورت

$$\|P_2\| \leq \|P_1\|$$

مثال: افرازی زیر را از نظر ظریف‌تر بودن باهم مقایسه کنید.

$$P_1 = \{0, 1\}$$

$$P_2 = \left\{ 0, \frac{1}{3}, 1 \right\}$$

$$P_3 = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

$$P_4 = \left\{ 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right\}$$

حل: واضح است که همه افرازا از P_1 ظریف‌ترند و افراز P_3 از P_2 ظریف‌تر است و افراز P_4 با افرازی P_2 و P_3 ارتباطی ندارد.

مثال: افرازی از بازه $[1, 3]$ بنویسید که نرم آن کمتر از $\frac{3}{7}$ و نقطه $\sqrt{2}$ را شامل باشد.

حل: ابتدا فرض می‌کنیم $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ یک افراز منظم این بازه با نرم کمتر از $\frac{3}{7}$

باشد پس

$$\Delta_i = \|P\| = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} < \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{2}{n} < \frac{3}{7} \Rightarrow n > \frac{14}{3} \Rightarrow n \geq 5$$

اگر قرار دهیم $n = 5$ داریم:

$$\|P\| = \Delta_i = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$P = \left\{ 1, 1 + \frac{2}{5}, 1 + 2 \times \frac{2}{5}, 1 + 3 \times \frac{2}{5}, 1 + 4 \times \frac{2}{5}, 1 + 5 \times \frac{2}{5} \right\} = \left\{ 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \frac{11}{5}, \frac{13}{5}, 3 \right\}$$

حال اگر نقطه $x = \sqrt{2}$ را به آن اضافه کنیم یک افراز ظریف‌تر از p به نام افراز p'

ایجاد می‌شود یعنی قرار دهیم $p' = p \cup \{\sqrt{2}\}$ پس

$$p' = \left\{ 1, \frac{7}{5}, \sqrt{2}, \frac{9}{5}, \frac{11}{5}, \frac{13}{5}, 3 \right\}$$

و افراز مطلوب مسئله، افراز p' است زیرا $\sqrt{2} \in p'$ و چون p' ظریف‌تر از p است پس

$$\|P'\| \leq \|P\| \quad \text{بنابراین} \quad \|P'\| < \frac{3}{7}.$$

تعریف: مجموع ریمان تابع

اگر $f: [a, b] \rightarrow R$ یک تابع کراندار و $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ یک افراز بازه $[a, b]$ باشد هر مجموع به صورت زیر را یک مجموع ریمان تابع f نظیر افراز P می‌نامیم.

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta_i$$

که در آن منظور از Δ_i طول i امین زیر بازه افراز و t_i هر نقطه دلخواهی از بازه i ام می‌تواند باشد یعنی

$$t_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$$

مثال: با فرض $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow R$ و $P = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$ یک مجموع ریمان برای تابع $f(x) = \sin(x)$

نظیر افراز P بنویسید.

حل:

$$I_1 = \left[0, \frac{\pi}{6}\right], \Delta_1 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}, t_1 \in I_1$$

$$I_2 = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right], \Delta_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}, t_2 \in I_2$$

$$I_3 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right], \Delta_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, t_3 \in I_3$$

که اگر به طور دلخواه از بازه اول $t_1 = \frac{\pi}{6}$ و از بازه دوم $t_2 = \frac{\pi}{6}$ و از بازه سوم $t_3 = \frac{\pi}{3}$ اختیار شود داریم:

$$\begin{aligned} S(P, f) &= f(t_1)\Delta_1 + f(t_2)\Delta_2 + f(t_3)\Delta_3 \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \frac{\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \frac{\pi}{12} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi + \pi + 3\sqrt{3}\pi}{24} \\ &= \frac{\pi}{24}(3 + 3\sqrt{3}) = \frac{\pi}{8}(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

بدیهی است که نظیر این افراز برای تابع f به تعداد نامتناهی می توان مجموع ریمان نوشت زیرا t_i در بازه I_i می تواند هر نقطه دلخواهی باشد.

$$t_i \in I_i \Rightarrow x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$$

و با تغییر $t_i, f(t_i)$ و در نتیجه $S(P, f)$ تغییر خواهد کرد.

تعریف: مجموع ریمان بالایی و پایینی تابع f نظیر افراز P

اگر $f: [a, b] \rightarrow R$ یک تابع کراندار و $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ یک افراز بازه $[a, b]$ باشد در این صورت مجموع های زیر را به ترتیب مجموع ریمان بالایی تابع f نظیر افراز P و مجموع ریمان پائینی تابع f نظیر افراز P می نامیم.

$$U(p, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \quad \text{و} \quad L(p, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i$$

که در آن

$$M_i = \sup \{f(x) \mid x \in I_i\} \quad \text{و} \quad m_i = \inf \{f(x) \mid x \in I_i\}$$

مثال: تابع $f: \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \rightarrow R$ و افراز $P = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ مفروض است، مطلوب $f(x) = \sin(x)$

است مجموع ریمان بالایی و پائینی تابع f نظیر افراز p .

حل:

$$I_1 = \left[0, \frac{\pi}{6} \right], \Delta_1 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

$$M_1 = \sup \{ f(x) \mid x \in I_1 \} = \sup \left\{ \sin(x) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right\} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right], \Delta_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

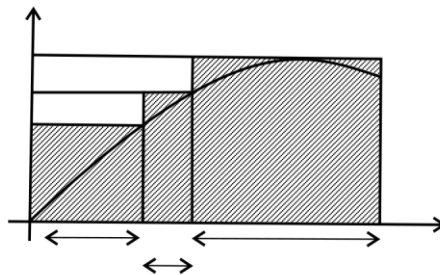
$$M_2 = \sup \{ f(x) \mid x \in I_2 \} = \sup \left\{ \sin(x) \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right\} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$I_3 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \right], \Delta_3 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$$

$$M_3 = \sup \{ f(x) \mid x \in I_3 \} = \sup \left\{ \sin(x) \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \right\} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow U(P, f) = M_1 \times \Delta_1 + M_2 \times \Delta_2 + M_3 \times \Delta_3$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{12} + 1 \times \frac{5\pi}{12} = \frac{12 + \sqrt{2}}{24} \pi$$



با توجه به شکل فوق می بینیم که مجموع ریمان بالایی تابع برابر مجموع مساحت ناحیه های هاشورزده می باشد و به طور مشابه

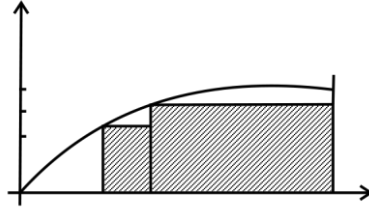
$$m_1 = \inf \{ f(x) \mid x \in I_1 \} = \inf \left\{ \sin(x) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right\} = \sin(0) = 0$$

$$m_2 = \inf \{ f(x) \mid x \in I_2 \} = \inf \left\{ \sin(x) \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right\} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$m_3 = \inf \{ f(x) \mid x \in I_3 \} = \inf \left\{ \sin(x) \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \right\} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow L(P, f) = m_1 \times \Delta_1 + m_2 \times \Delta_2 + m_3 \times \Delta_3$$

$$= 0 \times \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{5\pi}{12} = \frac{1+5\sqrt{2}}{24} \pi$$



مجموع ریمان پایینی برابر مجموع سطح ناحیه‌های هاشورزده در شکل بالا می‌باشد.
بدیهی است که برای هر تابع کراندار و هر افراز p داریم:

$$L(P, f) \leq S(P, f) \leq U(P, f)$$

در حالت کلی ثابت می‌شود که $L(P, f) \leq S(P, f) \leq U(P, f)$ اما در برخی از توابع هرچه افراز ظریف‌تر شود می‌توان مشاهده کرد که مقادیر مجموع ریمان بالایی و پایینی تابع به هم نزدیک‌تر می‌شوند، در این حالت تابع را انتگرال‌پذیر (دارای انتگرال معین) می‌نامند.

تعریف: تابع انتگرال‌پذیر (دارای انتگرال معین)

اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ کراندار باشد، تابع f را بر این بازه انتگرال‌پذیر، دارای انتگرال معین می‌نامند هرگاه حد مجموع‌های ریمان آن موجود باشد به عبارتی تابع کراندار f دارای

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} S(P, f) = A$$

انتگرال معین است هرگاه عدد حقیقی A موجود باشد به‌طوری‌که

$$\|P\| \rightarrow 0^+$$

توضیح:

الف: می‌توان ثابت کرد اگر f انتگرال‌پذیر باشد در این صورت

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} S(P, f) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} U(P, f) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} L(P, f)$$

ب: همچنین می‌توان ثابت کرد که اگر f انتگرال‌پذیر باشد، یعنی حد مجموع‌های ریمان آن موجود باشد، در این صورت این حد منحصر بفرد است و آن را انتگرال معین تابع f بر بازه $[a, b]$ می‌نامیم و با نماد $\int_a^b f(x) dx$ و یا به اختصار با $\int_a^b f dx$ آن را نشان

می‌دهیم یعنی

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} S(P, f) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} U(P, f) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} L(P, f)$$

ج: به‌طور قرارداد تعریف می‌کنیم،

$$\int_b^a f \, dx = -\int_a^b f \, dx, \int_a^a f \, dx = 0$$

د: درانتگرال نامعین جواب انتگرال یک تابع است و به مقدار ثابت k وابسته است و در انتگرال معین جواب انتگرال یک عدد متناهی است که همان حد مجموع‌های ریمان می‌باشد.

مثال: با استفاده از تعریف انتگرال معین، در انتگرال‌پذیری توابع زیر تحقیق کنید.

$$\begin{aligned} f: [0,1] \rightarrow R & \quad f: [0,1] \rightarrow R \\ f(x) = 2 & \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x \in Q \\ -2 & x \notin Q \end{cases} \end{aligned}$$

حل: اگر $f: [0,1] \rightarrow R$ فرض شود و $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ یک افراز دلخواه بازه $[0,1]$ باشد،

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta_i = \sum_{i=1}^n 2 \Delta_i = 2 \sum_{i=1}^n \Delta_i = 2 \times (b-a) = 2(1-0) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} S(P, f) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} 2 = 2 \Rightarrow \int_0^1 f \, dx = 2$$

و اگر $f: [0,1] \rightarrow R$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in Q \\ -2 & x \notin Q \end{cases}$ فرض شود، f انتگرال

معین ندارد زیرا به فرض خلف اگر f انتگرال‌پذیر و $\int_0^1 f \, dx = A$ باشد داریم:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} U(P, f) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} L(P, f) = A$$

حال اگر $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ یک افراز دلخواه بازه $[a, b]$ باشد واضح است که در هر زیربازه داریم:

$$M_i = \sup\{f(x) | x \in I_i\} = 2$$

$$m_i = \inf\{f(x) | x \in I_i\} = -2$$

$$\Rightarrow U(p, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i = \sum_{i=1}^n 2 \Delta_i + 2 \times \Delta_i = 2 \sum_{i=1}^n \Delta_i = 2(1-0) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{\|p\| \rightarrow 0^+} U(P, f) = \lim_{\|p\| \rightarrow 0^+} 2 = 2 \Rightarrow A = 2$$

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i = \sum_{i=1}^n -2 \times \Delta_i = -2 \sum_{i=1}^n \Delta_i = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} L(P, f) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} -2 = -2 \Rightarrow A = -2$$

و این تناقض است زیرا جواب حد در صورت وجود باید منحصر به فرد باشد (مطابق توضیح (ب) در تعریف انتگرال معین) پس حد موجود نیست و f انتگرال معین ندارد.

تمرین

۱. افزای از بازه $[0, 2]$ بنویسید که طول آن کمتر از $\frac{3}{5}$ باشد.

۲. با فرض $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow R$ و $P = \left\{-\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$ مطلوب است مجموع ریمان $f(x) = \cos(x)$ بالایی و پایینی تابع f نظیر افراز P .

۳. با استفاده از فرمول‌های مربوط به مجموع یعنی،

$$\sum_{k=1}^n K = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{مجموع } n \text{ عدد طبیعی از } 1 \text{ تا } n$$

$$\sum_{k=1}^n K^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{مجموع توان دوم } n \text{ عدد طبیعی از } 1 \text{ تا } n$$

$$\sum_{k=1}^n K^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \text{مجموع توان سوم } n \text{ عدد طبیعی از } 1 \text{ تا } n$$

مجموع مقادیر زیر را به دست آورید.

$$\text{الف: } \sum_{k=1}^7 k^2 - \sum_{k=1}^7 \frac{k^3}{4} \quad \text{ب: } \sum_{k=1}^5 \frac{k^3}{225} + \left(\sum_{k=1}^5 k\right)^3$$

$$\text{ج: } \sum_{k=18}^{71} k(k-1) \quad \text{د: } \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} + 2n\right)$$

۴. مساحت زیر نمودار تابع (ناحیه محدود بین منحنی و محور x ها و خطوط عمودی

محدوده مشخص شده) در هر یک از حالت‌های زیر را برآورد کنید.

الف: با استفاده از مجموع ریمان پایینی با چهار مستطیل با عرض مساوی برای تابع

$$f(x) = x^2 \text{ بین } x = 0 \text{ تا } x = 1.$$

ب: با استفاده از مجموع ریمان بالایی با دو مستطیل با عرض مساوی برای تابع

$$f(x) = 4 - x^2 \text{ بین } x = -2 \text{ تا } x = 2.$$

ج: با استفاده از مقدار تابع در نقطه میانی مستطیل‌ها با چهار مستطیل با عرض

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ بین } x = 1 \text{ تا } x = 5 \text{ مساوی برای تابع}$$

۵. نمودار توابع داده شده را رسم کنید و سپس مجموع ریمان تابع f یعنی

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t_i \text{ را در هر یک از موارد زیر حساب کنید.}$$

الف: اگر t_i نقطه ابتدایی زیربازه باشد و $f(x) = \sin(x)$ بر بازه $[-\pi, \pi]$ که به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است.

ب: اگر t_i نقطه میانی زیربازه و $f(x) = x^2 - 1$ بر بازه $[0, 1]$ که به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است.

۶. به کمک فرمول‌های داده شده در تمرین سوم، حد مجموع ریمان تابع‌های زیر را

وقتی $n \rightarrow +\infty$ تعیین کنید هرگاه بازه $[a, b]$ به n زیربازه مساوی تقسیم شود و t_i نقطه انتهایی زیربازه باشد.

$$\text{الف: } f(x) = x^2 + x \text{ بر بازه } [0, 1]$$

$$\text{ب: } f(x) = x^2 - x \text{ بر بازه } [-1, 0]$$

۷. به کمک محاسبه مساحت، مقدار انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx, \int_{-2}^1 |x| dx, \int_a^b 2x dx, \text{ اگر } a > 0, b > 0$$

$$\int_{-4}^0 \sqrt{16 - x^2} dx$$

• قضیه‌های انتگرال معین

۱. اگر $f: [a, b] \rightarrow R$ پیوسته باشد، f بر این بازه انتگرال معین دارد.

نکته: عکس قضیه فوق لزوماً صحیح نیست.

$\int_a^b f dx$ وجود دارد $\Rightarrow f$ پیوسته بر $[a, b]$ است.

۲. $\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$ به شرط آنکه $n+1 \neq 0$

مثال:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$\int_a^b dx = \int_a^b x^0 dx = \frac{b^1 - a^1}{1} = b - a \Rightarrow \int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b \sqrt{x} dx = \frac{b^{\frac{1}{2}+1} - a^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3})$$

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{b^{-\frac{1}{2}+1} - a^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}} = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a})$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1^4 - 0^4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{1-x^2} \right] dx$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \geq -x^2 \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow 1 \geq 1-x^2 \geq 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$1 \leq \frac{1}{1-x^2} \leq \frac{4}{3} \Rightarrow \left[\frac{1}{1-x^2} \right] = 1 \Rightarrow I = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx = \int_a^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

مثال: به کمک مفهوم انتگرال معین پاسخ حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

حل:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

سعی می‌کنیم مجموع بالا را به مجموع ریمان یک تابع پیوسته (که انتگرال پذیر باشد) تبدیل کنیم.

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{n}{n}}$$

اگر فرض کنیم $\Delta_i = \frac{1}{n}$ و $f(x) = \frac{1}{1+x}$ پس

$$t_1 = \frac{1}{n}, t_2 = \frac{2}{n}, \dots, t_n = \frac{n}{n} = 1$$

و اگر قرار دهیم

$$p = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\}$$

در این صورت بازه $[a, b]$ همان بازه $[0, 1]$ خواهد بود و چون $\|p\| = \Delta_i = \frac{1}{n}$ اگر $n \rightarrow +\infty$ داریم $\|p\| \rightarrow 0^+$.

بنابراین حد فوق، حد یک مجموع ریمان است وقتی $\|p\| \rightarrow 0^+$ و چون تابع پیوسته پس انتگرال پذیر است و حد مجموع‌های ریمان آن همان انتگرال معین تابع می‌باشد یعنی،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

۳. خاصیت خطی بودن انتگرال معین

اگر توابع f_1 و f_2 هر دو بر بازه $[a, b]$ دارای انتگرال معین باشند آنگاه توابع $\lambda f_1, f_1 - f_2, f_1 + f_2$ (ضریب ثابت) نیز بر این بازه انتگرال معین دارند و علاوه بر آن

$$\int_a^b (f_1 + f_2) dx = \int_a^b f_1 dx + \int_a^b f_2 dx$$

$$\int_a^b (f_1 - f_2) dx = \int_a^b f_1 dx - \int_a^b f_2 dx$$

$$\int_a^b \lambda f_1 dx = \lambda \int_a^b f_1 dx$$

و یا در حالت کلی می‌توان نوشت

$$\int_a^b (\lambda f_1 + f_2) dx = \lambda \int_a^b f_1 dx + \int_a^b f_2 dx$$

مثال:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2\sqrt{x} - 3x^4) dx &= 2 \int_0^1 \sqrt{x} dx - 3 \int_0^1 x^4 dx = \\ 2 \times \frac{1^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3 \times \frac{1^5 - 0^5}{5} &= 2 \times \frac{2}{3} \times (1 - 0) - \frac{3}{5} (1 - 0) = \frac{4}{3} - \frac{3}{5} = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

توضیح:

الف: این قضیه را می‌توان برای هر تعداد متناهی از توابع انتگرال‌پذیر بکار برد یعنی اگر f_1 و $f_2, \dots, f_n$ تابع دارای انتگرال معین و λ_1 و $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ عدد ثابت باشند آنگاه تابع $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$ بر بازه $[a, b]$ انتگرال معین دارد و علاوه بر آن

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n) dx &= \\ \lambda_1 \int_a^b f_1 dx + \lambda_2 \int_a^b f_2 dx + \dots + \lambda_n \int_a^b f_n dx \end{aligned}$$

و یا به عبارتی

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b \lambda_i f_i dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f_i dx$$

به طور مثال اگر $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد، بر هر بازه $[a, b]$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) dx &= a_n \int_a^b x^n dx + a_{n-1} \int_a^b x^{n-1} dx + \dots + a_1 \int_a^b x dx + a_0 \int_a^b dx = \\ a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{b^n - a^n}{n} + \dots + a_1 \frac{b^2 - a^2}{2} + a_0 (b - a) \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^n a_i x^i dx = \sum_{i=0}^n \int_a^b a_i x^i dx = \\ \sum_{i=0}^n a_i \int_a^b x^i dx &= \sum_{i=0}^n a_i \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1} \end{aligned}$$

ب: به کمک خطی بودن انتگرال معین می‌توان ثابت کرد اگر دو تابع انتگرال‌پذیر حداکثر در تعداد متناهی نقطه متمایز باشند آنگاه انتگرال معین آن دو تابع باهم برابر است.

مثال: $\int_2^3 [x] dx$

حل:

$$[x]: [2, 3] \rightarrow R$$

$$[x] = \begin{cases} 2 & 2 \leq x < 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases}$$

تابع $[x] = y_1$ بر بازه $[2, 3]$ با تابع ثابت $y_2 = 2$ فقط در یک نقطه متمایز است و بنابراین طبق توضیح (ب) داریم:

$$\int_2^3 y_1 dx = \int_2^3 y_2 dx = \int_2^3 2 dx = 2 \int_2^3 dx = 2(3-2) = 2$$

مثال: مطلوب است $\int_0^1 f(x) dx$ اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ باشد.

حل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تابع f بر بازه $[0, 1]$ با تابع ثابت $y = 1$ فقط در یک نقطه آن هم $x = 0$ تفاوت دارد و مطابق قسمت ب از این توضیح، انتگرال معین این دو تابع برابر است پس

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 1 dx = \int_0^1 dx = 1 - 0 = 1$$

نکته: در دو مثال فوق می‌بینیم که f ناپیوسته است ولی انتگرال معین دارد بنابراین قضیه اول مربوط به انتگرال معین، قضیه یک طرفه است.

$$\int_a^b f dx \text{ وجود دارد} \Leftrightarrow f \text{ پیوسته بر است } [a, b]$$

۴. خاصیت مقایسه‌ای انتگرال معین

اگر توابع f_1 و f_2 هر دو بر بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشند و بر این بازه همواره $f_1(x) \geq f_2(x)$ در این صورت

$$\int_a^b f_1 dx \geq \int_a^b f_2 dx$$

نتیجه: اگر $f \geq 0$ و f انتگرال پذیر باشد پس $\int_a^b f dx \geq 0$ و اگر $f \leq 0$ و f انتگرال پذیر آنگاه $\int_a^b f dx \leq 0$.

مثال: $\int_0^1 \sqrt[3]{3x^2 + 4x} dx \neq -3$
حل: زیرا

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1: \quad & 3x^2 \geq 0 \\ & 4x \geq 0 \\ \hline & 3x^2 + 4x \geq 0 \\ \Rightarrow & \sqrt[3]{3x^2 + 4x} \geq 0 \\ \Rightarrow & \int_0^1 \sqrt[3]{3x^2 + 4x} dx \geq 0 \\ \Rightarrow & \int_0^1 \sqrt[3]{3x^2 + 4x} dx \neq -3 \end{aligned}$$

مثال: $\int_3^5 \frac{dx}{1+x} \neq 4$
حل: زیرا

$$\begin{aligned} 3 \leq x \leq 5 \Rightarrow & 4 \leq 1+x \leq 6 \Rightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{6} \\ \Rightarrow & \int_3^5 \frac{1}{4} dx \geq \int_3^5 \frac{1}{1+x} dx \geq \int_3^5 \frac{1}{6} dx \\ \int_3^5 \frac{1}{6} dx = & \frac{1}{6} \int_3^5 dx = \frac{1}{6} \times (5-3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \int_3^5 \frac{1}{4} dx = & \frac{1}{4} \int_3^5 dx = \frac{1}{4} \times (5-3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \geq \int_3^5 \frac{dx}{1+x} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \int_3^5 \frac{dx}{1+x} \neq 4 \end{aligned}$$

۵. قضیه مقدار میانگین برای انتگرال

اگر تابع f بر بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد و بر این بازه کران بالای آن M و کران پایین آن m باشد یعنی برای هر $x \in [a, b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$ آنگاه

$$m(b-a) \leq \int_a^b f dx \leq M(b-a)$$

مثال: به کمک قضیه مقدار میانگین محدوده تقریبی برای انتگرال معین زیر تعیین کنید.

حل:

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{9}} \cos(\sqrt{x}) dx$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi^2}{9} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{\pi}{3} \stackrel{\cos \downarrow}{\Rightarrow} 1 \geq \cos(\sqrt{x}) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 \times \left(\frac{\pi^2}{9} - 0 \right) \geq \int_0^{\frac{\pi^2}{9}} \cos(\sqrt{x}) dx \geq \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi^2}{9} - 0 \right) \Rightarrow \frac{\pi^2}{18} \leq I \leq \frac{\pi^2}{9}$$

(در این قسمت منظور از I انتگرال معین مطرح شده است).

توضیح:

الف: بنابر قضیه فوق $m(a-b) \leq \int_a^b f dx \leq M(b-a)$ یعنی

$$m \leq \frac{\int_a^b f dx}{b-a} \leq M$$

قابل ذکر است که $\frac{\int_a^b f dx}{b-a}$ را متوسط تابع f بر بازه $[a, b]$ یا میانگین f و یا چگالی تابع f بر این بازه می‌نامند و با نماد $\bar{f}$ نشان می‌دهند.

مثال: متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را بر بازه $[0, 1]$ تعیین کنید.

حل:

$$\bar{f} = \frac{\int_0^1 f(x) dx}{1-0} = \frac{\int_0^1 \sqrt{x} dx}{1} = \frac{1^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

ب: نتیجه قضیه مقدار میانگین در حالتیکه f پیوسته باشد:

اگر تابع $[a, b] \rightarrow R$: f پیوسته باشد آنگاه نقطه‌ای مانند c بین a تا b وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f dx = f(c) \times (b-a)$$

مثال: اگر $[a, b] \rightarrow R$: f پیوسته و $\int_a^b f dx = 0, b > a$ ، آنگاه f بر این بازه دست کم یک ریشه دارد.

حل: چون f پیوسته است پس بنابر نتیجه قضیه مقدار میانگین برای انتگرال، نقطه‌ای مانند c بین a تا b وجود دارد به طوریکه،

$$\int_a^b f dx = f(c) \times (b-a) \Rightarrow 0 = f(c) \times (b-a) \stackrel{b>a}{\Rightarrow} f(c) = 0 \Rightarrow$$

c یک ریشه f بر این بازه است

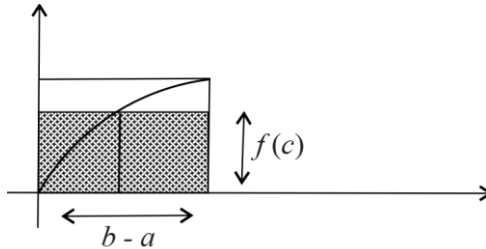
مثال: نقطه c در نتیجه قضیه مقدار میانگین برای انتگرال معین را بر بازه $[0,1]$ نظیر

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ تعیین کنید.

حل:

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = f(c) \times (b-a) = \sqrt{c} \times (1-0) \Rightarrow \frac{2}{3} = \sqrt{c} \Rightarrow c = \frac{4}{9}$$

نکته: در مثال فوق می‌بینیم که $f(c) \times (b-a)$ مساحت مستطیلی است که در نقطه c بنا می‌شود و این مساحت با سطح زیر منحنی $y = \sqrt{x}$ در این فاصله برابر است.



۶. خاصیت جمع‌پذیری انتگرال معین

اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه f بر هر زیربازه آن نیز انتگرال‌پذیر است و علاوه بر آن اگر c نقطه دلخواهی بین a تا b باشد داریم:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

مثال: متوسط تابع زیر را بر بازه داده شده تعیین کنید.

$$y_1 = |3x - 1| : [0,1]$$

حل:

$$y_1 = |3x - 1|$$

$$\frac{x}{3x-1} \left| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ - & 0 & + \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \bar{y}_1 = \frac{\int_0^1 |3x-1| dx}{1-0} = \int_0^{\frac{1}{3}} -(3x-1) dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 (3x-1) dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} -(3x-1) dx = -3 \int_0^{\frac{1}{3}} x dx + \int_0^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$-3 \frac{(\frac{1}{3})^2 - 0^2}{2} + (\frac{1}{3} - 0) = \frac{-1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 (3x-1) dx = 3 \int_{\frac{1}{3}}^1 x dx - \int_{\frac{1}{3}}^1 dx = 3 \frac{1^2 - (\frac{1}{3})^2}{2} - (1 - \frac{1}{3})$$

$$= 3 \times \frac{1 - \frac{1}{9}}{2} - \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \bar{y}_1 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

توضیح:

الف: این قضیه برای هر تعداد متناهی از زیر بازه‌های $[a, b]$ برقرار است یعنی اگر

$a, b]$ باشند و f بر بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد آنگاه

$$\int_a^b f dx = \int_a^{c_1} f dx + \int_{c_1}^{c_2} f dx + \dots + \int_{c_n}^b f dx$$

$$\begin{array}{ccccccc} & [& \times & \times & & \times &] \\ & a & c_1 & c_2 & \dots\dots\dots & c_n & b \end{array} \rightarrow$$

مثال: مطلوب است.

$$\int_{-1}^{2.5} [x] dx$$

حل:

$$[x] = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x \leq 2.5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-1}^{2.5} [x] dx &= \int_{-1}^0 [x] dx + \int_0^1 [x] dx + \int_1^2 [x] dx + \int_2^{2.5} [x] dx \\ &= \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^1 (0) dx + \int_1^2 (1) dx + \int_2^{2.5} (2) dx = \\ &= -\int_{-1}^0 dx + 0 + \int_1^2 dx + 2 \int_2^{2.5} dx = -(0 - (-1)) + (2 - 1) + 2 \times (2.5 - 2) \\ &= -1 + 1 + 2 \times 0.5 = 1 \end{aligned}$$

مثال: اگر $f(x) = \int_0^x t [x] dt$ ، ضابطه f بر بازه $[-1, 3]$ به طور صریح (بدون انتگرال) چیست؟

حل:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = \int_0^x t \times (-1) dt =$$

$$-\int_0^x t dt = -\frac{x^2 - 0^2}{2} = \frac{-x^2}{2}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = \int_0^x 0 dt = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = \int_0^x t \times (+1) dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2 - 0^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = \int_0^x t \times 2 dt = 2 \int_0^x t dt = 2 \times \frac{x^2 - 0^2}{2} = x^2$$

$$x = 3 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow f(x) = \int_0^3 t \times 3 dt = 3 \int_0^3 t dt = 3 \frac{3^2 - 0^2}{2} = \frac{27}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{2} & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{2} & 1 \leq x < 2 \\ x^2 & 2 \leq x < 3 \\ \frac{27}{2} & x = 3 \end{cases}$$

ب: در حالت کلی ثابت می‌شود در فرمول خاصیت جمع‌پذیری انتگرال معین یعنی

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

اگر ۲ انتگرال از ۳ انتگرال فوق موجود باشد (صرف نظر از مکان c که داخل بازه $[a, b]$ باشد یا نباشد) آنگاه انتگرال سوم نیز وجود دارد و رابطه فوق برقرار است.

ج: تابع قطعه به قطعه پیوسته یا تابع به‌طور تکه‌ای پیوسته، تابع f را گوئیم هرگاه، بازه‌ای

مانند $[a, b]$ و افرازی از این بازه مانند، $P = \{a, c_1, c_2, \dots, c_n, b\}$ ، که در آن

$$a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$$

موجود باشد و توابع $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ به‌طوریکه f_1 بر بازه (a, c_1) و f_2 بر بازه (c_1, c_2)

و... f_{n+1} بر بازه (c_n, b) پیوسته و در نقاط مرزی حدهای جهت‌ی موجود و متناهی باشند، به‌طوریکه

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & a < x < c_1 \\ f_2(x) & c_1 < x < c_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_{n+1}(x) & c_n < x < b \end{cases}$$

واضح است که f بر این بازه انتگرال‌پذیرست و داریم:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^{c_1} f_1 \, dx + \int_{c_1}^{c_2} f_2 \, dx + \dots + \int_{c_n}^b f_{n+1}(x) \, dx$$

مثال: تابع $y = [x]$ و $y = \text{sign}(x)$ توابع قطعه به قطعه پیوسته می‌باشند.

۷. اگر f بر بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه تابع $|f|$ نیز بر این بازه انتگرال‌پذیر است و

داریم:

$$\left| \int_a^b f \, dx \right| \leq \int_a^b |f| \, dx$$

نکته: عکس قضیه فوق لزوماً برقرار نیست.

مثال: تابع $f: [0,1] \rightarrow R$ انتگرال معین ندارد ولی تابع $|f| = 2$ انتگرال پذیر است.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in Q \\ X & x \notin Q \end{cases}$$

$$\int_0^1 |f| \, dx = \int_0^1 2 \, dx = 2(1-0) = 2 \int_0^1 dx = 2$$

۸. قضیه هشتم شامل سه قسمت است.

اولاً: اگر $f: [a,b] \rightarrow R$ انتگرال پذیر باشد در این صورت تابع

$$g: [a,b] \rightarrow R$$

$$g(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

بر بازه $[a,b]$ پیوسته است.

ثانیاً: اگر $f: [a,b] \rightarrow R$ پیوسته باشد در این صورت تابع g در قسمت اولاً، تابعی

مشتق پذیر است و داریم $g'(x) = f(x)$ به عبارتی $\left(\int_a^x f(t) \, dt \right)' = f(x)$

این قسمت را تحت عنوان قضیه اساسی اول حسابان می‌شناسیم.

مثال: بافرض $H(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$ مطلوب است مقادیر زیر:

$$H(1), H(4) - H(2), H'(1)$$

حل:

$$H(1) = \int_1^1 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

$$H(4) - H(2) = \int_1^4 \frac{dt}{1+t^2} - \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int_2^4 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$H'(1) = \left(\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \right)' \Big|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

مثال: بافرض آنکه f پیوسته باشد مطلوب است ضابطه‌ی f هرگاه

$$\int_1^x f(t) \, dt = x^2 - 2x + 1$$

حل: اگر از دو طرف رابطه فوق مشتق بگیریم بنابر قضیه اساسی اول حسابان، مشتق انتگرال تابع پیوسته، برابر خود تابع است یعنی،

$$\left(\int_1^x f(t) dt \right)' = (x^2 - 2x + 1)' \Rightarrow f(x) = 2x - 2$$

مثال: اگر f پیوسته باشد مطلوب است $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - a}$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\int_a^x f(t) dt \right)'}{1} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1} = f(a)$$

مثال: اگر f روی R پیوسته باشد، مطلوب است

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{\sin^2(x)}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{\sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x (x-t)f(t) dt \right)'}{2 \sin(x) \cos(x)} = (*)$$

از طرفی

$$\left(\int_0^x (x-t)f(t) dt \right)' = \left(\int_0^x xf(t) dt - \int_0^x tf(t) dt \right)' = \left(x \int_0^x f(t) dt \right)' - \left(\int_0^x tf(t) dt \right)'$$

بنابر قضیه اساسی اول حسابان

$$= \left(\int_0^x f(t) dt + xf(x) \right) - xf(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2 \sin(x) \cos(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt \right)'}{2(\cos^2(x) - \sin^2(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2(\cos^2(x) - \sin^2(x))} = \frac{f(0)}{2(1-0)} = \frac{f(0)}{2}$$

مثال: ثابت کنید تابع $g(x) = \int_x^a (1 + \sin^4(t^2)) dt$ وارون‌پذیر است.

حل:

$$g'(x) = \left(\int_x^a (1 + \sin^4(t^2)) dt \right)' = \left(- \int_a^x (1 + \sin^4(t^2)) dt \right)'$$

بنابر قضیه اساسی اول حسابان

$$= -(1 + \sin^4(x^2)) < 0 \Rightarrow g' < 0 \Rightarrow$$

g اکیداً نزولی پس وارون پذیر است.

نکته: در حالت کلی ثابت می شود اگر $f: [a, b] \rightarrow R$ پیوسته و β, α دو تابع مشتق پذیر باشند آنگاه،

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right)' = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

مطلب فوق را که تکمیل شده قضیه اساسی اول حسابان می باشد تحت عنوان قضیه لایب نیتز می شناسیم.

مثال: ثابت کنید تابع $g(x) = \int_{x^3}^0 (1+t^2) dt$ بر بازه $[0, +\infty)$ وارون پذیر است.

حل:

$$g'(x) = \left(\int_{x^3}^0 (1+t^2) dt \right)' =$$

$$= (1+0^2) \times (0)' - (1+(x^3)^2) \times (x^3)' = -(1+x^6) \times 3x^2$$

$g' < 0$ بر بازه $(0, +\infty)$ ، پس g بر بازه $[0, +\infty)$ اکیداً نزولی و وارون پذیر است.

مثال:

$$\left(\int_{\sin(x)}^{\sec(x)} \sqrt[3]{t} dt \right)' = \sqrt[3]{\sec(x)} \times (\sec(x))' - \sqrt[3]{\sin(x)} \times (\sin(x))'$$

$$= \sqrt[3]{\sec(x)} \times \sec(x) \operatorname{tg}(x) - \sqrt[3]{\sin(x)} \cos(x)$$

$$= \sec(x)^{\frac{4}{3}} \operatorname{tg}(x) - \sqrt[3]{\sin(x)} \cos(x)$$

مثال: اگر f تابعی با دستور زیر بر بازه $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$ باشد، مطلوب است ضابطه دقیق f

بطور صریح (بدون انتگرال).

$$f'(x) = \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

حل: بنابر قضیه لایب نیتز داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} \times (\sin(x))' - \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} \times (\cos(x))' \\ &= \frac{\cos(x)}{|\cos(x)|} - \frac{-\sin(x)}{|\sin(x)|} \end{aligned}$$

طبق فرض انتهای کمان x در باز $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ قرار دارد پس سینوس و کسینوس آن مثبت است.

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{\sin(x)} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + k$$

برای یافتن k به x مقدار می‌دهیم، اگر قرار دهیم $x = \frac{\pi}{4}$ داریم:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \Rightarrow 2 \times \frac{\pi}{4} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$$

ثالثاً: اگر $f: [a, b] \rightarrow R$ تابعی پیوسته و F تابع اولیه‌ای از آن باشد در این صورت

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F \Big|_a^b$$

توضیح: بنابر قسمت ثانیاً هر تابع پیوسته مانند f بازه بسته‌ای چون $[a, b]$ یک تابع اولیه بر این بازه دارد زیرا

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

بنابراین اگر قرار دهیم $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ داریم $g' = f$ یعنی g تابع اولیه‌ای از f است. و بنابر قضیه فوق اگر f پیوسته باشد بین انتگرال معین f و انتگرال نامعین f رابطه فوق وجود دارد، این قضیه را تحت عنوان قضیه اساسی دوم حسابان می‌شناسیم.

مثال: در قسمت انتگرال نامعین دیدیم که $y = \sin(x)$ تابع اولیه‌ای برای تابع $y = \cos(x)$ است پس

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \cos(4x)} dx$$

مثال:

حل:

$$\sqrt{1+\cos(4x)} = \sqrt{1+(2\cos^2(2x)-1)} = \sqrt{2\cos^2(2x)} = \sqrt{2} \times |\cos(2x)|$$

از طرفی $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ پس $0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$ پس $\cos(2x) \geq 0$

$$\Rightarrow |\cos(2x)| = \cos(2x) \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\cos(4x)} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{\sin(2x)}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نتیجه:

$$\int_a^b \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_a^b = -\cos(b) - (-\cos(a)) = -\cos(b) + \cos(a)$$

$$\int_a^b \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_a^b = \sin(b) - \sin(a)$$

$$\int_a^b \sec^2(x) dx = \tan(x) \Big|_a^b = \tan(b) - \tan(a)$$

$$\int_a^b \csc^2(x) dx = -\cot(x) \Big|_a^b = -\cot(b) - (-\cot(a))$$

$$= -\cot(b) + \cot(a)$$

$$\int_a^b \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) \Big|_a^b = \sec(b) - \sec(a)$$

$$\int_a^b \csc(x) \cot(x) dx = -\csc(x) \Big|_a^b = -\csc(b) - (-\csc(a))$$

$$= -\csc(b) + \csc(a)$$

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, n+1 \neq 0$$

به شرط

تمرین

۱. به کمک مفهوم انتگرال معین حدهای زیر را حساب کنید.

الف: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n c_k^2 \Delta_k$ اگر p افزاری از بازه $[-1, 0]$ و c_k یک نقطه دلخواه از بازه

k ام افزار p باشد.

ب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - c_k^2} \Delta_k$ اگر p افزاری از بازه $[0, 1]$ و c_k نقطه دلخواه از بازه k ام افزار p باشد.

۲. به کمک مفهوم انتگرال معین حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \frac{3}{n} \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \frac{3}{n} \sqrt{\frac{n}{n+3n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

۳. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx, \quad \int_0^{\sqrt{2}} (x - \sqrt{2}) dx, \quad \int_0^2 (3x^2 + x - 5) dx$$

۴. به کمک انتگرال معین، مساحت ناحیه محدود بین منحنی $y = 3x^2$ و محور x را بر بازه $[0, 2]$ تعیین کنید.

۵. به کمک قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها، محدوده تقریبی برای هر یک از انتگرال‌های زیر تعیین کنید.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_1^2 \frac{dx}{1+x^3}, \quad \int_0^1 \sqrt{x^3+8} dx, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

۶. به کمک قضیه مقدار میانگین $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{dt}{1+t^3}$ را بدست آورید.

۷. متوسط تابع‌های زیر را بر بازه‌های داده شده تعیین کنید.

الف: $f(x) = (x-1)^2$ بر بازه $[0, 3]$

ب: $g(x) = |x-1|$ بر بازه‌های $[1, 3]$ و $[-1, 3]$

۸. ثابت کنید اگر f و g بر بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر باشند آنگاه بر این بازه،

$$\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$$

۹. متوسط تابع $y = [x]$ را بر بازه $[1, 3]$ تعیین کنید.

$$۱۰. \int_{-2}^3 |x^2 - 1| dx \text{ مطلوب است}$$

۱۱. با فرض آنکه $f(x) = \int_{-1}^x t [t] dt$ ضابطه f را بر بازه $[-1, 3]$ به طور صریح (بدون انتگرال) بیان کنید.

۱۲. اگر $f: [a, b] \rightarrow R$ پیوسته و $a < b$ و $\int_a^b f dx = 0$ و f بر این بازه تغییر علامت ندهد، ثابت کنید $f = 0$.

۱۳. اگر $f: [1, 4] \rightarrow R$ پیوسته و $f(3) \neq 0$ باشد با ارائه دلیل تعیین کنید کدامیک از کمیت‌های زیر بزرگ‌تر است.

$$I_1 = \int_2^4 f^2 dx, I_2 = \int_1^4 f dx + \int_4^2 f dx + \int_2^1 f dx$$

۱۴. ثابت کنید اگر $f: [a, b] \rightarrow R$ انتگرال پذیر باشد آنگاه نقطه‌ای مانند c در بازه $[a, b]$ وجود دارد که $\int_a^c f dx = \int_c^b f dx$.

۱۵. اگر f تابعی با دستور زیر باشد، $f'(0)$ را در صورت وجود تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۱۶. تابع f را چنان تعیین کنید که $\frac{df}{dx} = \sqrt{1+x^2}$ و $f(1) = -2$.

۱۷. ثابت کنید اگر $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ پیوسته باشد، آنگاه معادله

$$\int_0^x t f(t) dt = 1 - 2x \text{ دقیقاً یک ریشه در بازه } [0,1] \text{ دارد.}$$

۱۸. اگر داشته باشیم $y' = \frac{1}{x}$ و $y(\pi) = -3$ کدامیک از پاسخ‌های زیر برای y صحیح

است؟

الف: $y = \int_1^x \frac{dt}{t} - 3$ ب: $y = \int_0^x \sec(t) dt + 4$

ج: $y = \int_{-1}^x \sec(t) dt + 4$ د: $y = \int_{\pi}^x \frac{dt}{t} - 3$

۱۹. مشتق توابع زیر را بر حسب متغیر x حساب کنید.

$$\int_0^{\sqrt{x}} \cos(t) dt \text{ و } \int_1^{\sin(x)} 3t^2 dt \text{ و } \int_{\sqrt{x}}^0 \sin(t^2) dt \text{ و } x \int_2^{x^2} \sin(t^3) dt \text{ و } \int_0^{x^4} \sqrt{t} dt$$

$$\int_0^{\sin(x)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \text{ و } \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{dt}{1-t^2} \text{ و } \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sin(t^2) dt$$

۲۰. اگر f تابعی پیوسته باشد و همچنین داشته باشیم برای

$$\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos(\pi x), x > 0$$

مطلوب است $f(4)$.

۲۱. انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int_0^4 (3x - \frac{x^3}{4}) dx \text{ و } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx \text{ و } \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sec(x) + \tan(x))^2 dx$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x+1)(x^2+4) dx \text{ و } \int_{-3}^{-1} \frac{x^5 - 2x}{x^3} dx \text{ و } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(x) + \sec(x))^2 dx \text{ و } \int_{-4}^4 |x| dx \text{ و } \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(x) + |\cos(x)|) dx$$

$$\int_0^4 \left| \sqrt{x+2} - x \right| dx$$

۲۲. تابع f را چنان تعیین کنید که $f'(x) = 8 \sin^2(x + \frac{\pi}{12})$ و $f(0) = 8$.

روش تغییر متغیر برای حل انتگرال

در خاتمه این فصل، روش تغییر متغیر در حل انتگرال را می‌آوریم که اولین روش انتگرال‌گیری در این متن و از اصلی‌ترین تکنیک‌های انتگرال‌گیری می‌باشد. قبل از این دیدیم که اگر F تابع اولیه f باشد و متغیر از x به $ax+b$ (با شرط $a \neq 0$) تغییر کند داریم:

$$\int f(x)dx = F(x) + k \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + k$$

حال اگر تغییر متغیر لزوماً حالت ساده تبدیل x به $ax+b$ نباشد یعنی حالت کلی تغییر x به u ، باید در زیر انتگرال نیز به جای dx ، du موجود باشد. مثال: مطلوب است پاسخ انتگرال‌های زیر:

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = ?$$

در این مثال می‌دانیم که $\int \cos(x)dx = \sin(x) + k$ اما به جای x ، عبارت $\sqrt{x}$ بکار رفته است به عبارتی به جای x متغیر دیگری یعنی $u = \sqrt{x}$ بکار رفته است پس باید به جای dx نیز du موجود باشد.

$$du = u'dx$$

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow du = (\sqrt{x})'dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = \int \cos(u)du = \sin(u) = \sin(\sqrt{x}) + k$$

$$\int \left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$I = \int \left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

برای یاری گرفتن از فرمول‌های انتگرال نامعین، اگر قرار دهیم $u = 2 + \sqrt{x}$ داریم:

$$du = \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx \Rightarrow I = \int \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int \frac{2 \times \sqrt{2+\sqrt{x}}}{2 \times \sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int \sqrt{u} du$$

$$= 2 \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} (2+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + k$$

راه دیگر: اگر قرار دهیم $u = \sqrt{2+\sqrt{x}}$ داریم:

$$u^2 = 2 + \sqrt{x} \Rightarrow 2u du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4u du \Rightarrow$$

$$I = \int \sqrt{2+\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int u \times 4u du = 4 \int u^2 du = 4 \frac{u^3}{3} = \frac{4}{3} (\sqrt{2+\sqrt{x}})^3 + k$$

$$I = \int x \sqrt{3x+2} dx \quad \text{مثال:}$$

حل: اگر قرار دهیم $u = 3x+2$ پس $3dx = du$ و داریم:

$$x = \frac{u-2}{3} \Rightarrow I = \int x \times \sqrt{3x+2} \times \frac{3dx}{3} =$$

$$\int \frac{u-2}{3} \times \sqrt{u} \times \frac{du}{3} = \frac{1}{9} \int (u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{1}{9} \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] =$$

$$\frac{1}{9} \left[\frac{2}{5} (3x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (3x+2)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{45} (3x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{27} (3x+2)^{\frac{3}{2}} + k$$

راه دیگر: تمرین

$$I = \int x^3 \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{مثال:}$$

حل: اگر قرار دهیم $u = 1+x^2$ داریم $du = 2x dx$ بنابراین

$$I = \int x \times x^2 \sqrt{1+x^2} dx = \int x^2 \sqrt{1+x^2} \times \frac{2x dx}{2}$$

چون $x^2 = u - 1$ داریم $1+x^2 = u$

$$\int (u-1) \sqrt{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int (u \sqrt{u} - \sqrt{u}) du =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] = \frac{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + k$$

$$I = \int \frac{\sin^7(x)}{\cos^2(x)} dx \quad \text{مثال:}$$

حل: اگر قرار دهیم $u = \cos(x)$ داریم:

$$du = -\sin(x) dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\sin^6(x) \times \sin(x)}{\cos^2(x)} dx = - \int \frac{\sin^6(x) \times (-\sin(x)) dx}{\cos^2(x)}$$

از طرفی

$$\sin^6(x) = (\sin^2(x))^3 = (1 - \cos^2(x))^3 = (1 - u^2)^3 \Rightarrow$$

$$I = - \int \frac{(1 - u^2)^3}{u^2} du = - \int \frac{1 - u^6 - 3u^2 + 3u^4}{u^2} du =$$

$$- \int \left(\frac{1}{u^2} - u^4 - 3 + 3u^2 \right) du = - \left[\frac{u^{-1}}{-1} - \frac{u^5}{5} - 3u + 3 \frac{u^3}{3} \right] =$$

$$\frac{1}{u} + \frac{u^5}{5} + 3u - u^3 = \frac{1}{\cos(x)} + \frac{\cos^5(x)}{5} + 3\cos(x) - \cos^3(x) + k$$

$$= \sec(x) + \frac{1}{5} \cos^5(x) + 3\cos(x) - \cos^3(x) + k$$

$$\int_{-1}^1 x(x-1)^{10} dx \quad \text{مثال:}$$

حل: اگر قرار دهیم $u = x - 1$ پس $x = 1 + u$ و $du = dx$ بنابراین

$$\int x(x-1)^{10} dx = \int (1+u)u^{10} du = \int (u^{11} + u^{10}) du = \frac{u^{12}}{12} + \frac{u^{11}}{11}$$

$$= \frac{(x-1)^{12}}{12} + \frac{(x-1)^{11}}{11} \Rightarrow I = \frac{(x-1)^{12}}{12} + \frac{(x-1)^{11}}{11} \Big|_{-1}^1 =$$

$$0 - \left(\frac{(-2)^{12}}{12} + \frac{(-2)^{11}}{11} \right) = -(-2)^{11} \left[\frac{-2}{12} + \frac{1}{11} \right] = 2^{11} \left[\frac{-1}{6} + \frac{1}{11} \right]$$

$$= 2^{11} \times \frac{-5}{66} = 2^{10} \times \frac{-5}{33} = \frac{-5120}{33}$$

توضیح: در مثال فوق، پس از تغییر متغیر و بدست آوردن جواب یعنی در مرحله

$$I = \frac{u^{12}}{12} + \frac{u^{11}}{11}$$

به جای آنکه دوباره متغیر را به x برگردانیم و مقادیر (-1) و (1) را در آن جایگزین کنیم، می‌توان معادل این مقادیر را به جای u جایگزین کنیم یعنی

$$x = 1 \Rightarrow u = x - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow u = x - 1 = -1 - 1 = -2 \Rightarrow$$

$$I = \frac{u^{12}}{12} + \frac{u^{11}}{11} \Big|_{-2}^0 = \frac{-5120}{33}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \sin(x)} dx$$

مثال:

حل:

$$\sqrt{1 + \sin(x)} \times \frac{\sqrt{1 - \sin(x)}}{\sqrt{1 - \sin(x)}} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2(x)}}{\sqrt{1 - \sin(x)}} = \frac{\sqrt{\cos^2(x)}}{\sqrt{1 - \sin(x)}} = \frac{|\cos(x)|}{\sqrt{1 - \sin(x)}}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \Rightarrow |\cos(x)| = \cos(x) \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - \sin(x)}} dx$$

و اگر قرار دهیم $u = 1 - \sin(x)$ پس

$$du = -\cos(x) dx \Rightarrow I = - \int \frac{-\cos(x) dx}{\sqrt{1 - \sin(x)}} = - \int \frac{du}{\sqrt{u}} = - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$-2\sqrt{u} = -2\sqrt{1 - \sin(x)} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -2 \left[\sqrt{1 - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} - \sqrt{1 - \sin(0)} \right]$$

$$= -2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right] = -\sqrt{2} + 2$$

چند نکته:

الف: برخی از انتگرال‌ها ممکن است به چندین روش متفاوت قابل حل باشد، بطور مثال در انتگرال فوق می‌توان برای یافتن جواب راه دیگری را هم بکار برد.

راه حل دوم:

$$\sqrt{1 + \sin(x)}$$

$$\sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$1 = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 1 + \sin(x) &= \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &= \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \\
 \Rightarrow \sqrt{1 + \sin(x)} &= \sqrt{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|
 \end{aligned}$$

از آنجا که $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ پس

$$0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{12} \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0 \text{ و } \cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \left. \frac{-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \right|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= +2 \left[-\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

و واضح است که چون انتگرال معین است همه راه‌های صحیح باید به جواب یکسان منتهی شود.

ب: اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد آنگاه برای هر عدد ثابت c ,

$$\int_0^T f(x) dx = \int_{c+0}^{c+T} f(x) dx = \int_c^{c+T} f(x) dx$$

مثال:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = \int_{0+\frac{\pi}{6}}^{2\pi+\frac{\pi}{6}} \sin(x) dx$$

ج: در انتگرال معین اگر f یک تابع انتگرال پذیر زوج و بازه انتگرال گیری متقارن باشد داریم:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

مثال:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos(x) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 2 \times 1 = 2$$

و همچنین اگر f تابعی انتگرال پذیر و فرد باشد و بازه انتگرال گیری متقارن، آنگاه،

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

مثال:

$$\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} dx = 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3(x) - x^5) dx = 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^5(x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (2x^3 + 3x^2 - x + 1) dx &= \int_{-1}^1 (2x^3 - x) dx + \int_{-1}^1 (3x^2 + 1) dx = \\ 0 + 2 \int_0^1 (3x^2 + 1) dx &= 2 \times (x^3 + x) \Big|_0^1 = 2[(1+1) - 0] = 4 \end{aligned}$$

د: اگر تابع f بر بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ پیوسته باشد در این صورت

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(x)) dx$$

مثال:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin^3(x) - \cos^2(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^3(x) - \sin^2(x)| dx$$

مثال: اگر n یک عدد طبیعی باشد، مطلوب است

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(x)}{\sin^n(x) + \cos^n(x)} dx$$

حل: بنابر توضیح (د)،

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(x)}{\cos^n(x) + \sin^n(x)} dx \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 I + I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(x)}{\sin^n(x) + \cos^n(x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(x)}{\cos^n(x) + \sin^n(x)} dx \\
 \Rightarrow 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(x) + \cos^n(x)}{\sin^n(x) + \cos^n(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \\
 \Rightarrow 2I &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

تمرین

۱. تابع f را چنان تعیین کنید که $f''(x) = 4 \sec^2(2x) \operatorname{tg}(2x)$ و $f(0) = -1$ و $f'(0) = 4$.

۲. به کمک روش تغییر متغیر انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}
 &\int (3x+2)(3x^2+4x)^4 dx \quad \text{و} \quad \int x \sin(2x^2) dx \\
 &\int \frac{1}{x^2} \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad \text{و} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx \\
 &\int \sec^2(3x+2) dx \quad \text{و} \quad \int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} dx \quad \text{و} \quad \int \sqrt{x} \sin^2\left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right) dx \\
 &\int \frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} dx \quad \text{و} \quad \int x \sqrt{4-x} dx \quad \text{و} \quad \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x} \sin^2(\sqrt{x})} dx \\
 &\int (x+1)^2 (1-x)^5 dx \quad \text{و} \quad \int \csc\left(\frac{x-\pi}{2}\right) \cot g\left(\frac{x-\pi}{2}\right) dx \\
 &\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{2 \sec(x)}} dx \quad \text{و} \quad \int x(x-1)^{10} dx \quad \text{و} \quad \int (x+5)^3 \sqrt{x-5} dx \\
 &\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{و} \quad \int 3x^5 \sqrt{1+x^3} dx \quad \text{و} \quad \int \frac{x}{(x-4)^3} dx \\
 &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{\sqrt{1+3 \sin^2(x)}} dx \quad \text{و} \quad \int \sqrt{\operatorname{tg}(x)} \sec^4(x) dx \quad \text{و} \quad \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \\
 &\int \sqrt{1+\sqrt{x}} dx \quad \text{و} \quad \int \sin(x) \sqrt{1-\cos(x)} dx \quad \text{و} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}
 \end{aligned}$$

۳. سعی کنید انتگرال زیر را دست کم با ۲ روش حل کنید.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x) dx}{\sqrt{1-\cos(x)}}$$

۴. انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 3) dx \text{ و } \int_{-1}^1 |x^3 - 3x| dx \text{ و } \int_{-4}^4 |x| dx \text{ و } \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x+1)(x^2+4) dx$$

۵. اگر $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد مطلوب است $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx$